На правах рукописи

Е.С. [signature]

КОМЕНДАНТЕНКО Елена Сергеевна

ЗАДАЧА ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ НЕСПРЯМЛЯЕМЫХ ПУТЕЙ НА ПЛОСКИХ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕТКАХ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРКОЛЯЦИИ ОДНОРОДНЫХ БЕРНУЛЛИЕВСКИХ ПОЛЕЙ

Специальность: 01.01.03 — математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Белгород — 2016

бк. № 3
24.01.17

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и математической физики, Белгородского государственного национального исследовательского университета
Вирченко Юрий Петрович

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и топологических методов анализа Воронежского государственного университета, профессор
Гликлих Юрий Евгеньевич

Доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник отдела теоретической физики Физико-технического института Уральского отделения РАН
Чубурин Юрий Павлович

Ведущая организация: Лаборатория теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ), г.Дубна

Защита состоится « 16 » февраля 2017 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 212.015.15 при Белгородском государственном национальном исследовательском университете по адресу: Россия, 308015, г. Белгород, ул. Студенческая, 14, корпус 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белгородского государственного национального исследовательского университета и на сайте http://www.bsu.edu.ru/bsu/

Автореферат разослан «22» декабря 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.015.15, д.ф.-м.н. Захвалинский В.С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы. Диссертация представляет собой комплексную математическую работу, в которой исследуются специальные математические модели статистической физики с привлечением методов и результатов из различных разделов математики таких, как теория графов, комбинаторная математика, линейная алгебра, теория вероятностей.

Статистическая механика полимеров относится к самому сложному, с точки зрения построения и анализа математических моделей, разделу статистической физики. Конструкционная сложность моделей в этом случае связана с огромным числом атомов, входящих в состав каждой из молекул и, как следствие, наличием у них большого числа различных конформаций, что, в свою очередь, означает наличие у каждой из них большого числа степеней свободы. Поэтому при решении задач статистической механики ансамбля таких молекул, возникает проблема перечисления их расположений в фазовом пространстве. Это существенно осложняет исследование систем полимерных молекул. Таким образом, в статистической механике полимеров математические проблемы возникают уже при изучении статистики конформаций одиночных молекул. В этом случае чуть ли не единственным методом математического моделирования и анализа соответствующих моделей является так называемое решеточное приближение, при котором непрерывное расположение атомов, составляющих каждую молекулу, заменяется на их расположение в узлах «кристаллической» решетки (обычно простой кубической). Однако, даже при использовании решеточного приближения соответствующие математические модели оказываются очень сложными для анализа, что связано с разветвленным устройством полимерных молекул. Существенное упрощение возникает в том случае, когда молекулы представляют собой гибкие полимерные цепи. Тогда, задача об описании состояний отдельной молекулы сводится к описанию различных траекторий заданной длины на решетке, на которые наложены дополнительные ограничения, связанные с представлением о возможном расположении полимерной цепи в пространстве.

Один из простейших способов идеализированного описания гибкой полимерной цепи состоит в представлении ее в виде траектории, которая имеет вид последовательности n шагов с фиксированной длиной, начинающейся в точке $\mathbf{x}$ решетки. Такая модель позволяет вычислять, в рамках формализма равновесной статистической механики, физические параметры системы полимерных молекул. Базовой величиной, определяющей состояние системы молекул при нулевой температуре, является энтропия $S(\mathbf{x})$, определяемая всеми конформациями, которые обладают фиксированной начальной пространственной точкой $\mathbf{x}$. Она определяет независящие от температуры статистические веса, которые вносит каждая из молекул системы при усреднении по распределению вероятностей Гиббса этого ансамбля. Функция $S(\mathbf{x})$ выражается через число различных путей $N_n(\mathbf{x})$ длины n, выходящих из $\mathbf{x}$, $S(\mathbf{x}) = \ln[N_n(\mathbf{x})]$. Так как типичные значения числа n очень велики $\sim 10^3$, то вычисление $S(\mathbf{x})$ сводится к нахождению главного члена асимптотики функции $N_n(\mathbf{x})$ при $n \to \infty$.

Простейшие оценки величины $S(\mathbf{x})$ связаны с представлением полимерной молекулы в виде траектории случайного блуждания. Однако, такое приближение является очень грубым. Оно не учитывает, что при расположении полимерной молекулы в пространстве, отдельные ее звенья взаимодействуют друг с другом. Это приводит к определенным ограничениям на траектории, которые моделируют расположения молекул. Наличие таких граничений существенно изменяет значения числа $N_n(\mathbf{x})$. Ранее давались оценки $S(\mathbf{x})$, читывающие только несамопересекаемость траекторий, моделирующих молекулы. Расчеты, проведенные в настоящей работе, учитывают более тонкий эффект – отталкивание их тдельных звеньев друг от друга. В связи с этим в работе вводится понятие о неспрямляемых траекториях на решетке и величина $N_n(\mathbf{x})$ понимается как число всех неспрямляемых раекторий длины n с общей начальной точкой $\mathbf{x}$.

Представление о неспрямляемых траекториях на решетке и задача их перечисления есно связаны с задачами дискретной теории перколяции. В связи с этим, предлагаемый диссертации метод вычисления числа $N_n(\mathbf{x})$ применяется для вычисления верхних и ижних оценок порога перколяции и вычисления вероятности перколяции в решеточных моделях с контролируемой точностью, на основе известного в этом разделе математической физики «контурного метода». В работе дается усовершенствование классического онтурного метода, возникшего в статистической механике решеточных моделей, на основе понятия неспрямляемых путей на периодических графах.

Степень разработанности темы исследования. Теория перколяции берёт своё начало с работ Дж. Хаммерсли, которые привели к постановке принципиально новых задач в еории случайных процессов. *Возникновение перколяции* является своеобразным геометрическим «фазовым переходом» в среде. С математической точки зрения это означает, что при изменении параметров, определяющих распределение вероятностей случайного множества, с вероятностью единица, изменяется топология его случайных реализаций. Оказалось, что уже простые перколяционные модели приводят к очень сложным математическим проблемам, которые не поддаются изучению на основе традиционных подходов, используемых в математической физике и теории случайных процессов.

Бурное развитие теории перколяции относится к 70-м годам прошлого столетия, когда пециалистами по физике твердого тела была осознана важность идеи о спонтанном возникновении протекания. Многие физические эффекты, проявляющиеся в твердотельных редах в низкотемпературной области, имеют «перколяционную составляющую». Интерес физиков к теории перколяции в 70-е и 80-е годы вызвал к жизни большое число исследований эмпирического характера и компьютерных экспериментов, часто довольно примитивных без какого-либо обоснования точности применяемых в них вычислительных етодов.

В связи с этим, исследования по теории перколяции можно разделить на два совершено различных направления. Одно из них объединяет работы эвристического характера, ыполненных на основе физических рассуждений, а также работы, связанные с компьютерным моделированием. Другое направление имеет своей целью получение результатов трого математического характера, в том числе и численных, но выполненных с контролируемой точностью. Именно это направление называют *математической теорией перколяции*, и с ним мы связываем исследование в настоящей работе. Этот раздел математической физики подразделяется на два, существенно отличающихся по сложности решаемых адач, направления, связанных соответственно с изучением дискретных и непрерывных оделей.

Одним из методов изучения дискретных перколяционных моделей является т.н. *контурный метод*. Он возник на основе идеи, впервые использованной Р. Пайерлсом для

доказательства существования фазового перехода в классических ферромагнитных решеточных системах статистической механики, и был применен Дж. Хаммерсли для анализа предложенных им дискретных двумерных моделей.

Контурный метод дает возможность установить наличие перколяционного перехода для случайных множеств, порождаемых этими моделями. Однако, в той форме, которая была использована Дж.Хаммерсли, этот метод не позволял вычислять вероятность перколяции и находить со сколь угодно большой точностью оценки *порога перколяции*. Тем не менее, контурный метод допускает обобщение для анализа многомерных дискретных моделей теории перколяции, которое было применено Р.Л. Добрушиным при анализе трехмерной модели Изинга.

Метод поколений, в некотором смысле, альтернативный контурному методу, который был предложен М.В. Меньшиковым. Его применимость также ограничена бернуллиевскими случайными полями, так как в конструкцию метода заложено использование марковских ветвящихся процессов. Этот метод позволяет, хотя бы в принципе, вычислять порог перколяции со сколь угодно большой контролируемой точностью в перколяционных моделях, порождаемых бернуллиевскими случайными полями. Однако, он, с самого начала, приводит к рутинным алгебраическим вычислениям, что серьезно ограничивает его применимость. В то же время, этот метод можно использовать для доказательства утверждений качественного характера относительно свойств перколяционных моделей.

Как контурный метод, так и метод поколений, в двумерных задачах теории перколяции, тесно связаны с комбинаторной задачей перечисления несамопересекающихся путей наперед заданной длины $n \in \mathbb{N}$ на решетках различного типа. Попытки уточнения величины $\ln N_n$, с которой связана верхняя оценка порога перколяции делались многими авторами. При этом получение верхних и нижних оценок показателя роста числа N_n представляют собой совершенно разные по сложности задачи.

Следует указать, что несмотря на то, что к настоящему времени издано уже несколько достаточно всеобъемлющих монографий по теории перколяции, которые посвящены разработке ее математической стороны, а также вышли серьезные обзоры, учебники, научно-популярные издания и справочные статьи, но нет никаких оснований считать, что теория перколяции является достаточно глубоко разработанной математической теорией.

Даже в рамках дискретных моделей, предложенных Дж. Хаммерсли, до настоящего времени, нет ответов на многие важные для приложений вопросы. В настоящей диссертации делается попытка дать ответы на некоторые из них. Используя модификацию контурного метода (она названа в работе методом *кластерного разложения*), удалось уточнить верхнюю границу порога перколяции и вычислить с большей точностью область сходимости кластерного разложения вероятности перколяции.

Еще менее изученными являются аналогичные задачи для многопараметрических перколяционных моделей, где случайные множества порождаются бернуллиевскими полями, у которых вероятность заполнения вершин периодически зависит от положения вершин на графе. В этом случае вероятность перколяции является функцией от нескольких различных вероятностей заполнения вершин. Гиперповерхность в пространстве возможных значений этих вероятностей, которая является ее графиком, формирует т.н. *фазовую диаграмму*. Кроме того, имеются нерешенные математические проблемы, связанные с описанием критического поведения перколяционных характеристик.

Цель работы: В соответствии с паспортом специальности, целью работы является **исследование математическими методами математических проблем, возникающих в термодинамике и статистической физике**. В работе разрабатывается метод решения задачи о перечислении неспрямляемых путей на периодических графах с целью вычисления энтропии системы невзаимодействующих линейных полимерных молекул, а также с целью получения оценок порогов перколяции и вычисления вероятностей перколяции с контролируемой точностью для бернуллиевских случайных полей на плоских периодических графах.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие **задачи:**

1. Выделить дискретные перколяционные модели из класса тех, которые порождаются однородными бернуллиевскими полями на периодических графах, и у которых вероятность перколяции характеризуется только одной критической точкой c_* в интервале $[0,1]$ изменения вероятности c заполнения вершин графа. В этом случае зависящая от одного параметра c вероятность перколяции может быть вычислена на основе последовательных приближений с областью сходимости $c \in [c_*, 1]$, начиная с нулевого приближения при $c = 1$.

2. Выделить оптимальный класс путей на периодических графах, которые реализуют перколяцию из любой фиксированной его вершины и на основе которых допустимо построение марковских аппроксимаций процесса построения таких путей в зависимости от их длины. Эти пути в диссертации названы неспрямляемыми.

3. Разработать метод получения верхних и нижних оценок числа N_n неспрямляемых путей, исходящих из фиксированной вершины, в зависимости от их длины.

4. На основе разработанного метода получения оценок числа N_n найти его верхние и нижние оценки для плоских однородных решеток.

5. На основе полученных оценок найти нижние оценки критической точки c_* для однородных бернуллиевских полей на плоских однородных решетках.

6. Доказать теорему о монотонности вероятности перколяции как функции от c.

7. Разработать общий аналитический подход для вычисления вероятности перколяции дискретных перколяционных моделей, порождаемых бернуллиевскими полями на периодических графах, на основе перечисления всех конечных кластеров, содержащих фиксированную вершину.

8. Для моделей, основанных на плоских периодических графах, доказать теорему о связи задачи перечисления всех конечных кластеров, содержащих фиксированную вершину, и неспрямляемых циклов на этих графах.

9. На основе приближенных решений с контролируемой точностью задачи о перечислении всех неспрямляемых циклов, окружающих фиксированную вершину, найти оценки точности приближений вероятности перколяции для плоских однородных периодических графов, а также верхние оценки для критической точки c_* каждого из этих графов.

10. На основе развитого общего аналитического метода решения перколяционной задачи для плоских однородных графов произвести расчеты первых приближений вероятности перколяции и дать оценки их точности.

Научная новизна. В результате проведенного исследования перколяционных моделей создан общий метод решения задач о вычислении комбинаторной энтропии, в рамках решеточного приближения систем статистической механики, состоящих из линейных полимерных молекул, и развито приложение этого метода к решению задач теории перколяции, связанных с однородными бернуллиевскими полями на плоских решетках.

В рамках развитой в диссертации теории научную новизну составляют:

1. Введение понятия неспрямляемого пути на периодических графах и, в частности, понятия о неспрямляемых циклах на плоских периодических графах.

2. Метод марковских аппроксимаций для получения верхних и нижних оценок числа N_n неспрямляемых путей в зависимости от их длины на периодических графах с началом в фиксированной вершине.

3. Получение более точных верхних и нижних оценок числа N_n на основе разработанного метода для плоских однородных решеток.

4. Получение нижних оценок порога перколяции c_* для однородных бернуллиевских полей на плоских однородных решетках на основе верхних оценок числа N_n.

5. Теорема о монотонном возрастании вероятности перколяции бернуллиевских случайных полей на бесконечных графах как функции от вероятностей заполнения каждой из вершин и, как следствие, теорема о возрастании вероятности перколяции каждого неоднородного бернуллиевского поля на произвольном бесконечном графе, определяемого набором вероятностей $\langle c_1, ..., c_m \rangle$ заполнения различных вершин графа, по каждой из переменных c_i, $i = 1 \div m$.

6. Теорема об взаимно-однозначной связи между внешними границами конечных кластеров, содержащих фиксированную вершину, в дискретных перколяционных моделях, которые порождаются бернуллиевскими полями на плоских периодических графах, и множеством неспрямляемых циклов, окружающих эту вершину.

7. Усовершенствование контурного метода для вычисления с контролируемой точностью вероятности перколяции для плоских периодических графов, на основе использования верхних оценок числа неспрямляемых циклов, окружающих фиксированную вершину.

Теоретическая и практическая значимость. Разработанные в диссертации методы представляют теоретическую ценность, так как, на их основе, могут приближенно вычисляться: комбинаторная энтропия систем линейных полимерных молекул и вероятности перколяции для различных дискретных перколяционных моделей.

Полученные в работе результаты могут иметь также практическое приложение при обработке экспериментальной информации в физики конденсированных сред при изучении в них структурных фазовых переходов.

Методология и методы исследования. В процессе решения поставленных задач спользуются методы теории графов, методы линейной алгебры и теории матриц для нализа трансфер-матрицы, а также методы теории бернуллиевских случайных полей на ериодических графах.

Положения, выносимые на защиту:

1. Верхние и нижние оценки числа N_n неспрямляемых путей на плоских однородных периодических графах.

2. Верхние и нижние оценки порога перколяции c_* однородных бернуллиевских полей на плоских однородных периодических графах.

3. Теорема о монотонном возрастании вероятности перколяции бернуллиевских случайных полей на бесконечных графах как функции от вероятностей заполнения вершин.

4. Теорема о взаимно-однозначном соответствии между внешними границами конечных кластеров, содержащих фиксированную вершину, в дискретных перколяционных моделях, которые порождаются бернуллиевскими полями на плоских периодических графах, и множеством неспрямляемых циклов, окружающих эту вершину.

Степень достоверности полученных научных результатов обусловлена корректностью доказательств математических утверждений и проведенных вычислений; согласованностью полученных в диссертации результатов с ранее полученными результатами.

Апробация работы. Материалы, включенные в диссертацию, опубликованы в 18 работах автора, в том числе 11 из них в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, как самостоятельных, так и выполненных совместно с научным руководителем, а также в материалах 3 международных и всероссийских научно-технических конференций. Опубликованные работы, материал которых включен в диссертацию, вышли из печати на протяжении 2007-015гг. и представлены в общем списке литературных источников, на которые имеются ссылки в диссертации.

Материалы работы докладывались и обсуждались на:

1. Воронежская зимняя школа С.Г.Крейна – 2008.
2. International Conference «Stochastic Analysis and Random Dynamics», June 14-20, 2009, Lviv, Ukraine.
3. Вторая Международная научная конференция «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения». Минск, 24-28 августа 2009.
4. Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна 2010.
5. Тринадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М.Кравчука, Киї, 13-15 мая 2010.
6. International Conference Modern Stochastics: Theory and Applications II September 7-11, 2010, Kyiv, Ukraine.
7. VIII School of Young Scientists "Non-local boundary problems and problems of modern analysis and informatics". Нальчик-Хабез, 25-30 июня 2010.
8. 3d International Conference on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics QEDSP2011 August 29- September 2, 2001, Kharkov, Ukraine.

9. Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна – 2012.
10. Чотирнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М.Кравчука. Київ, 2012.
11. Третья Международная научная конференция «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», Брест. 17-22 сентября 2012.
12. International Conference Modern Stochastics: Theory and Applications III, September 10-14, 2012, Kyiv, Ukraine.
13. Международная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения» 26-31 мая 2013, Белгород.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка используемой литературы, состоящего из 100 наименований (среди которых 33 литературных источника являются работами диссертанта) и двух приложений, содержит 28 иллюстраций. Основное содержание диссертации составляет 152 страницы машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснована актуальность темы и сформулированы цели диссертационного исследования, поставлены основные задачи работы. Дан краткий обзор развития научного направления, к которому относится диссертация. Характеризуется научная новизна полученных результатов, формулируются основные положения, выносимые на защиту. Кратко изложено содержание разделов диссертации.

Глава 1 (**Проблема перечисления неспрямляемых путей на периодических графах и основная задача дискретной теории перколяции**) диссертации носит вспомогательный характер. В первом разделе этой главы приводятся примеры различных объектов статистической физики, которые приводят к понятию о неспрямляемых путях на решетках или, что то же самое, на их топологических моделях – периодических графах, и к задаче их перечисления. Такие задачи применимы к изучению специальных моделей статистической механики, в которых проявляется эффект *просачивания случайных полей.*

Во втором разделе дано общее математическое определение понятия *дискретной перколяционной* структуры, которое является абстрактным обобщением всех дискретных математических моделей, в рамках которых проявляется эффект *перколяции.*

Перколяционная структура определяется парой $\langle \mathcal{G}, \mathsf{P}\rangle$: бесконечным связным графом $\mathcal{G} = \langle V, \Psi\rangle$ и распределением вероятностей P на классе всех подмножеств из V. Основным объектом изучения в работе являются т.н. *периодические графы.*

Определение 1.. *Бесконечный граф $\mathcal{G} = \langle V, \Psi\rangle$, $|V| = \infty$ называется периодическим, если он является связным и обладает свойствами:*

1) степень каждой его вершины конечна;

2) для некоторого числа $d \in \mathbb{N}$, возможно вложение (погружение) графа $\mathcal{G}$ в пространство $\mathbb{R}^d$, при котором вершины графа отображаются в точки $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + ... + x_d\mathbf{e}_d$, $x_j \in \mathbb{Z}$, $(\mathbf{e}_i)_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1 \div d$ и существует такой набор чисел $\langle L_1, ..., L_d\rangle$, $L_j \in \mathbb{N}$, $j = 1 \div d$, что имеет место

$$V + L_j\mathbf{e}_j = V\,, \qquad \Psi + L_j\mathbf{e}_j = \Psi\,, \qquad j = 1 \div d\,,$$

d – размерность периодического графа.

Определение 2. *Путь* $\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{y}\rangle$, $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i-1}\} \in \Psi$, $i = 1 \div n$ *называется неспрямляемым на графе* $\mathcal{G}(V, \Psi)$, *если* $\mathrm{dist}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) > 1$, *при* $|j-i| > 1$, $i, j = 1 \div n$ *длины* n.

В третьем разделе описаны математические модели дискретной теории перколяции, связанные со статистической механикой. Пусть $\tilde{\rho}$ – случайная дихотомическая функция на $\mathbb{Z}^d$ со значениями $\tilde{\rho}(\mathbf{x}) \in \{0,1\}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$. Распределение вероятностей для функции $\tilde{\rho}$ индуцирует распределение вероятностей для случайных подмножеств $\{\mathbf{x} : \tilde{\rho}(\mathbf{x}) = 1\} = \tilde{X} \subset \mathbb{Z}^d$. В общем случае, распределение вероятностей для $\tilde{\rho}$ определяется согласованным набором гиббсовских вероятностей

$$P_{\alpha_1,...,\alpha_n}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \equiv \Pr\{\tilde{\rho}(\mathbf{x}_j) = \alpha_j; j = 1 \div n\},$$

где $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\} = A \subset \mathbb{Z}^d$ и $\langle \alpha_1, ..., \alpha_n\rangle \in \{0,1\}^n$, $n \in \mathbb{N}$;

$$\Pr\{\tilde{\rho}(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Lambda\} = \frac{1}{Z_\Lambda} \exp(-\mathsf{H}_\Lambda[\rho]),$$

$$Z_\Lambda = \sum_{\{\rho(\mathbf{x}) \in \{0,1\}\,;\, \mathbf{x} \in \Lambda\}} \exp(-\mathsf{H}_\Lambda[\rho])$$

– вероятности реализаций дихотомических функций $\alpha(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Lambda$, где Λ – произвольный конечный куб $\Lambda = \{\mathbf{x} = \langle n_1, ..., n_d\rangle \in \mathbb{Z}^d : |n_j| \le L, j = 1 \div d\}$. Функционал $\mathsf{H}_\Lambda[\tilde{\rho}]$ называется *гамильтонианом*, который порождает гиббсовское случайное дихотомическое поле $\tilde{\rho}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Lambda$.

Распределение вероятностей для поля на всей решетке получаются посредством так называемого перехода к *термодинамическому пределу* по расширяющейся последовательности кубов с $L \to \infty$.

В частном случае, когда

$$\mathsf{H}_\Lambda[\rho] = \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} \beta(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}),$$

случайное поле называется *бернуллиевским*. Для распределения вероятностей выполняется условие статистической независимости узлов решетки. Поэтому $Z_\Lambda = \prod_{\mathbf{x} \in \Lambda}(1 + e^{-\beta(\mathbf{x})})$,

$$\Pr\{\tilde{X} \supset A\} = \prod_{\mathbf{x} \in A} \left(\frac{e^{-\beta(\mathbf{x})}}{1 + e^{-\beta(\mathbf{x})}}\right), \qquad A \subset \mathbb{Z}^d.$$

При $\beta(\mathbf{x}) = \mathrm{const}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ бернуллиевское поле является *однородным*.

В **Главе 2 (Задача перечисления неспрямляемых путей)** изучается комбинаторная задача о вычислении функции $N_n(\mathbf{x})$, числа неспрямляемых путей с фиксированной начальной вершиной $\mathbf{x}$ на периодических графах. Помимо самостоятельного интереса с точки зрения комбинаторной геометрии, эта задача возникает в статистической физике полимеров при вычислении комбинаторной энтропии линейных полимерных молекул и в теории перколяции.

В работе разработан метод получения последовательно уточняющих друг друга оценок, как сверху так и снизу, функции $(\ln N_n)/n$ при $n \in \mathbb{N}$. Метод основан на аппроксимации неспрямляемых путей с общей начальной вершиной траекториями марковских цепей со специальным образом конструируемыми матрицами перехода, которые в этом случае не являются стохастическими. Матрица перехода анализируется на основе теоремы Перрона-Фробениуса о спектральном разложении матриц с неотрицательными элементами.

Зафиксируем пару $\langle k, m\rangle \in \mathbb{N}^2$, $k > m$ и перенумеруем все последовательности путей $\gamma \in \mathfrak{G}_m$, $m \ge 1$ длины m с общей вершиной. Для фиксированной пары $\langle k, m\rangle$ определим класс $\mathfrak{G}^{(m)}_{k,n}$ путей из $\mathfrak{G}^{(m)}$ длины $m + (k-m)n$, построенных индуктивно для всех $n \in \mathbb{N}$ на основе формулы

$$\mathfrak{G}^{(m)}_{k,n+1} = \left\{\gamma_1 \underset{m}{\vee} \gamma_2 : \gamma_1 \in \mathfrak{G}^{(m)}_{k,n}, \gamma_2 \in \mathfrak{G}_k\right\},$$

где $\underset{m}{\vee}$ – операция склеивания путей с общим перекрытием длины m, которая для каждой пары путей, допускающей такое перекрытие, сопоставляет путь $\gamma \underset{m}{\vee} \gamma'$ длины $(k + k' - m)$,

$$\gamma \underset{m}{\vee} \gamma' = \langle \mathbf{z}_{i_1}, ..., \mathbf{z}_{i_k}, \mathbf{z}'_{j_{k'-m+1}}, ..., \mathbf{z}'_{j_{k'}}\rangle.$$

При этом $\mathfrak{G}^{(m)}_{k,1} = \mathfrak{G}_k$, $k > m$.

Аппроксимации сверху числа $N_n = |\mathfrak{G}_n|$ при больших значениях n основаны на включении $\mathfrak{G}^{(m)}_{k,n} \supset \mathfrak{G}_{m+(k-m)n}$, что дает $|\mathfrak{G}^{(m)}_{k,n}| \ge |\mathfrak{G}_{m+(k-m)n}|$, и на существовании для каждого $k \in \mathbb{N}$ предельного значения

$$\lambda_+(k,m) = \lim_{n\to\infty} |\mathfrak{G}^{(m)}_{k,n}|^{1/n}, \qquad k > m.$$

Существование предела доказывается на основе теоремы Перрона-Фробениуса. При этом имеет место $\lambda_+^{1/(k-m)}(k,m) \ge \lambda_* \equiv \limsup_{n\to\infty} |\mathfrak{G}_n|^{1/n}$.

Число $\lambda_+(k,m)^{1/(k-m)}$ с $k > m$ называется в диссертации верхней $\langle k, m\rangle$-оценкой главного члена асимптотики числа $\ln|\mathfrak{G}_n| = \ln N_n$. Для ее вычисления строится матрица перехода S в линейном пространстве $\mathbb{C}^{|\mathfrak{G}_{k-m}|}$ комплекснозначных наборов $\mathbf{g} = \langle g_j; j = 1 \div |\mathfrak{G}_{k-m}|\rangle$ так, что каждому пути $\gamma \in \mathfrak{G}_{k-m}$ взаимно однозначным образом, соответствует набор $\mathbf{f}^{(l)}$, где l – номер пути, который имеет компоненты $(\mathbf{f}^{(l)})_j = \delta_{jl}$, $j, l = 1 \div |\mathfrak{G}_{k-m}|$. Тогда для любого набора $\mathbf{g} \in \mathbb{C}^{|\mathfrak{G}_{k-m}|}$

$$(\mathsf{S}\mathbf{g})_l = \sum_{l'=1}^{|\mathfrak{G}_{k-m}|} S_{l,l'} g_{l'}, \quad l = 1 \div |\mathfrak{G}_{k-m}|.$$

где каждый матричный элемент $S_{l,l'}$ равен числу путей длины k, с начальным отрезком длины $k-m$, и который имеет номер l' в $\mathfrak{G}_{k-m}$, конечным отрезком такой же длины с номером l и перекрытием длины m.

Пусть $\langle \mathbf{g}^{(n)}; n \in \mathbb{N}_+\rangle$ – последовательность в пространстве $\mathbb{C}^{|\mathfrak{G}_{k-m}|}$ с фиксированными значениями k и $0 < m < k$, $k \in \mathbb{N}$, компоненты которой определяются формулой $\mathbf{g}^{(n)}_s = |\bar{\mathfrak{G}}^{(m)}_{k,n}(s)|$, $\quad n \in \mathbb{N}$, где $\bar{\mathfrak{G}}^{(m)}_{k,n}(s)$ – класс путей длины $m + (k-m)n$ с перекрытием m, которые заканчиваются путем $\gamma \in \mathfrak{G}_{k-m}$ длины $k-m$, имеющим номер s в классе $\mathfrak{G}_{k-m}$. Тогда $\mathbf{g}^{(n+1)} = \mathsf{S}\mathbf{g}^{(n)}$, $\quad n \in \mathbb{N}_+$, где набор $\mathbf{g}^{(0)}$ имеет компоненты, равные 1 для всех путей $\gamma \in \mathfrak{G}_{k-m}$. Откуда следует, что при любых $k \in \mathbb{N}$ и $0 < m < k$, число $|\mathfrak{G}^{(m)}_{k,n}|$ определяется формулой

$$|\mathfrak{G}^{(m)}_{k,n}| = (\mathbf{g}^{(0)}, \mathsf{S}^{n-1}\mathbf{g}^{(0)}).$$

На основе теоремы Перрона-Фробениуса доказывается, что оператор S с неотрицательными элементами обладает следующим свойством.

Теорема 2.1. *Пусть* S – *оператор с неотрицательными целочисленными матричными элементами* $S_{l,l'}$ *такими, что его положительное характеристическое число* λ, *которое* является наибольшим по модулю среди всех его характеристических чисел превосходит 1, матрица $S_{l,l'}$ не имеет ни одного нулевого столбца и, хотя бы для одного значения k, имеет место неравенство $\sum_{l'} S_{l',k} > 1$, то для последовательности $(\mathrm{g}^{(0)}, \mathrm{S}^n\mathrm{g}^{(0)})$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{g}^{(0)} = \langle 1, ..., 1\rangle$ существует предел:*

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{g}^{(0)}, \mathrm{S}^n\mathrm{g}^{(0)})^{1/n} .$$

Построение нижних оценок $\lambda_-(k,m)$ в работе осуществляется по той же схеме, что и построение верхних оценок, однако, ввиду отсутствия единого для всех периодических графов произвольного типа метода получения неравенства, ограничивающего $|\mathfrak{S}^{(m)}_{k,n}|$ снизу, в диссертации такого типа неравенства получаются только для плоских однородных решеток.

Основываясь на Теореме 2.1, в диссертации были получены конкретные верхние и нижние оценки $\lambda_\pm^{1/(k-m)}(k,m)$ для показателя роста числа N_n неспрямляемых траекторий на плоских однородных решетках (квадратной, треугольной и гексагональной) при различных значениях k и m:

1. Квадратная решетка

$$\lambda_-(3,2) < \lambda_* < \lambda_+^{1/3}(6,3) ,$$

где $\lambda_+(6,3)$ является наибольшим корнем уравнения $\lambda^3 - 14\lambda^2 + 8 = 0$, $\lambda^{1/3}(6,3) \approx 2.408$, а $\lambda_-(3,2)$ – наибольшим корнем уравнения $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_-(3,2) \approx 2.205$;

2. Треугольная решетка

$$\lambda_-(3,2) < \lambda_* < 3 ,$$

где $\lambda_-(3,2) = 1 + \sqrt{2} \approx 2,414$.

3. Гексагональная решетка

$$\sqrt{2} = \lambda_-(3,2) < \lambda_* < 2 .$$

В **Главе 3** (**Вычисление вероятности перколяции и задача перечисления неспрямляемых путей**), во-первых, устанавливаются качественные свойства вероятности перколяции $\mathrm{Q}_n[\mathrm{c};\mathbf{x}]$ для случайных множеств, порождаемых бернуллиевскими случайными полями на бесконечных графах $\mathcal{G} = \langle V, \Psi\rangle$, что соответствует постановке т.н. «задачи узлов» на кристаллических решетках при наличии в них «дефектных» узлов. Эта вероятность характеризует свойство просачивания, в общем случае, неоднородного бернуллиевского случайного поля $\{\tilde{c}(\mathbf{z}); \mathbf{z} \in V\}$ из любой его фиксированной вершины $\mathbf{x}$ на конечное расстояние $n \in \mathbb{N}$.

Во-вторых, в этой главе, на основе функционала $\mathrm{Q}_n[\mathrm{c};\mathbf{x}]$ от $\mathrm{c}(\mathbf{z}) = \langle \tilde{c}(\mathbf{z})\rangle$ развит метод получения нижней оценки порога перколяции однородного бернуллиевского поля, когда оно параметризовано одним параметром – вероятностью c заполнения вершин графа. На основе понятия о *неспрямляемых циклах*, в главе дается уточнение известного метода контурных верхних оценок порога перколяции для плоских однородных периодических графов и развит метод кластерного разложения для расчета вероятности перколяции.

Случайные *конфигурации* $\tilde{C}$ пространства погружения V генерируются дихотомическим бернуллиевским случайным полем $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$, $\tilde{c}(\mathbf{x}) \in \{0,1\}$ согласно формуле $\tilde{C} = \{\mathbf{z} \in V : \tilde{c}(\mathbf{z}) = 1\}$. Определим функционал $\mathrm{Q}_n[\mathrm{x}|\mathrm{c}]$ формулой

$$\mathrm{Q}_n[\mathrm{x}|\mathrm{c}] = \Pr\{\tilde{C} \in \Omega : \exists(\gamma \in \mathfrak{S}_n(\mathbf{x}) : \{\gamma\} \subset \tilde{C})\} .$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Для любого графа $\mathcal{G}(V,\Psi)$ и любой вершины $\mathbf{x} \in V$ вероятность $\mathrm{Q}_n[\mathrm{x}|\mathrm{c}]$ перколяции из вершины $\mathbf{x}$ на расстояние n бернуллиевского случайного поля $\{\tilde{c}(\mathbf{z}); \mathbf{z} \in V\}$ с распределением вероятностей $Pr\{\tilde{c}(\mathbf{z}) = 1\} = c(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in V$ является строго возрастающей функцией по каждой из концентраций $c(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in V$.*

Следствие. *Для любого бесконечного графа $\mathcal{G}(V,\Psi)$ и любой вершины $\mathbf{x} \in V$ вероятность $\mathrm{Q}[\mathbf{x}|\mathrm{c}]$ перколяции из вершины $\mathbf{x}$ на бесконечность бернуллиевского случайного поля $\{\tilde{c}(\mathbf{z}); \mathbf{z} \in V\}$ с распределением вероятностей $Pr\{\tilde{c}(\mathbf{z}) = 1\} = c(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in V$ является неубывающей функцией по каждой из концентраций $c(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in V$.*

При этом под расстоянием $\mathrm{dist}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ между двумя вершинами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ графа $\mathcal{G}$ понимается следующая величина

$$\mathrm{dist}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \min\{|\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})|; \gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})\} .$$

Если $\mathrm{Q}[\mathbf{x}|\mathrm{c}] > 0$, то говорят о наличии перколяции у случайного поля $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$. Таким образом, наличие перколяции определяется значениями всех параметров $c(\mathbf{x}) = \Pr\{\tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\}$. Для периодического графа имеется только лишь конечный набор таких параметров. Тогда конечномерное пространство параметров перколяционной структуры, порождаемой бернуллиевским случайным полем на таком графе разбивается на области, в которых имеется перколяция, а также области, в которых вероятность перколяции $\mathrm{Q}[\mathbf{x}|\mathrm{c}]$ точно равна нулю. Разбиение на такие области пространства параметров формирует т.н. *фазовую диаграмму* системы. Переход из одной области в другую представляет собой, с физической точки зрения, фазовый переход 2-го рода.

В частности, если перколяционная структура параметризуется одним параметром $c = \Pr\{\tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\} \in [0,1]$, $Q(c) \equiv \mathrm{Q}[\mathbf{x}|\mathrm{c}]$, то имеется отрезок $[0,c^*]$, в котором $\mathrm{Q}[\mathbf{x}|\mathrm{c}] = 0$, где c^* – т.н. *порог перколяции*. При этом вероятность перколяции зависит от одного параметра c. Так как, в силу доказанной теоремы, вероятность перколяции $\mathrm{Q}[\mathbf{x}|\mathrm{c}]$ зависит монотонно неубывающим образом от параметра c, то фазовая диаграмма на $[0,1]$ определяется числом $c^* = \sup\{c; \mathrm{Q}[\mathbf{x}|c] = 0\} = \inf\{c : \mathrm{Q}[\mathbf{x}|c] > 0\}$, которое называется порогом перколяции. В общем случае, $c^* > 0$. Такое положение реализуется в том случае, если периодический граф $\mathcal{G}(V,\Psi)$ является *однородным*.

Для получения оценок числа c^* снизу в случае однородных графов было доказано следующее утверждение.

Теорема 3.7. *Для порога перколяции c^* выполняется следующее неравенство*

$$c^* \geq \bar{c} = \liminf_{n\to\infty} |\mathfrak{S}_n(\mathbf{x})|^{-1/n} .$$

Эта теорема и верхние оценки числа $N_n = |\mathfrak{S}_n(\mathbf{x})|$, полученные во второй главе, позволили найти следующие оценки снизу порогов перколяции для плоских однородных периодических графов:

1. *Квадратная решетка* $c^* > 0.415$;
2. *Треугольная решетка* $c^* > 1/3$;
3. *Гексагональная решетка* $c^* > 1/2$.

В диссертации вычислены также верхние оценки порога перколяции c^* и вероятность перколяции $Q(c)$ для плоских однородных периодических графов. Эти расчеты основаны на предложенном в работе усовершенствовании метода *контурных оценок*, который восходит еще к основополагающим работам Хаммерсли. Предложенное усовершенствование заключается в использовании статистики неспрямляемых контуров на плоских решетках, которое дает возможность более точно оценивать остатки мажорантного ряда *перколяционного разложения* вероятности перколяции.

Обозначим посредством $W(\mathbf{x}, \tilde{C})$ случайный кластер, содержащий вершину $\mathbf{x}$. Если этот кластер конечный, то он характеризуется своей *внешней границей*

$$\bar{\partial} W = \{\mathbf{z} \in \partial W \, : \, \exists(\gamma(\mathbf{z}) \, : \, \{\gamma(\mathbf{z})\} \cap (W \cup \mathrm{Int}[W] \cup \partial W)) = \{\mathbf{z}\}\} \,,$$

где $\partial W = \{\mathbf{z} \in V \, : \, \mathbf{z} \notin W, \mathbf{z} \notin \mathrm{Int}[W], \exists(\mathbf{y} \in W \, : \, \mathbf{z}\psi\mathbf{y})\}$, и $\mathrm{Int}[W]$ – множество вершин, не принадлежащих W, но таких, что любой бесконечный путь с начальной вершиной в этом множестве имеет непустое пересечение с W.

Конечный кластер W на бесконечном графе назовем полным, если он не имеет внутренних узлов и его внешняя граница совпадает с множеством его граничных вершин, $\mathrm{Int}[W] = \varnothing$, $\partial W = \bar{\partial} W$.

Имеет место следующее дизъюнктивное разложение

$$\{\mathbf{x} \in \tilde{C}\} = \{|W(\mathbf{x}, \tilde{C})| = \infty\} \cup \Big(\bigcup_{W \in \mathfrak{W}(\mathbf{x})} \{\mathbf{x} \in W \subset \tilde{C}\}\Big) ,$$

где $\mathfrak{W}(\mathbf{x})$ – семейство всех конечных полных кластеров, содержащих вершину $\mathbf{x}$. Отсюда следует

Теорема 3.13. *Для любого бесконечного графа, у которого все степени вершин конечны и для любого дихотомического случайного поля на этом графе имеет место разложение для вероятности перколяции из любой фиксированной вершины* $\mathbf{x}$ *на бесконечность*

$$c - \sum_{G \in \bar{\partial}\mathfrak{W}(\mathbf{x})} \mathrm{Q}[G] = \Pr\{|W(\mathbf{x}, \tilde{C})| = \infty\} \,,$$

где $\bar{\mathfrak{W}}(\mathbf{x})$ *– семейство всех внешних границ конечных полных кластеров, содержащих вершину* $\mathbf{x}$.

Эта теорема позволяет вычислять с любой контролируемой точностью вероятность перколяции $\mathrm{Q}[\mathrm{x}{:}|\mathrm{c}] = \Pr\{|W(\mathbf{x}, \tilde{C})| = \infty\}$, так как сумма в левой части равенства всегда сходится. Формула для вероятности перколяции, представленная в теореме, названа в диссертации *перколяционным разложением*.

Для контроля точности приближений вероятности $\mathrm{Q}[\mathbf{x}|\mathrm{c}]$ необходимы оценки остатков ряда. Такого рода *контурные оценки* в работе находились на основе понятия *сопряженного графа*, которое ввел Г.Кестен. А именно, для бернуллиевского случайного поля имеет место следующая формула

$$\Pr\{\tilde{C} \cap G = \varnothing\} = \prod_{\mathbf{x} \in G} (1 - c(\mathbf{x})) \,,$$

где $c(\mathbf{x}) = \Pr\{\mathbf{x} \in \tilde{C}\}$. В частности, если поле однородно $c(\mathbf{x}) = c$, то $\Pr\{\tilde{C} \cap G = \varnothing\} = (1-c)^{|G|}$. Достаточным условием для того, чтобы вершина $\mathbf{x}$ принадлежала полному кластеру $W(\mathbf{x}, \tilde{C})$ является пустота его внешней границы. Это позволяет доказать для этого случая следующее утверждение.

Теорема 3.16. *Достаточным условием для существования перколяции у однородного бернуллиевского случайного поля* $\{\tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V\}$ *на плоском, периодическом однородном графе* $\langle V, \Psi \rangle$ *является сходимость ряда*

$$\sum_{\substack{G \in \partial\bar{\mathfrak{W}}: \\ 0 \in \mathrm{Int}[G]}} (1-c)^{|G|} < \infty \,,$$

$c = \Pr\{\mathbf{x} \in \tilde{C}\}$, *в котором суммирование производится по всем внешним границам на графе* $\langle V, \Psi \rangle$, *окружающим фиксированную вершину.*

Кроме того, оценки остатков в перколяционном разложении определяются рядом

$$\sum_{\substack{G \in \partial\bar{\mathfrak{W}}: \\ 0 \in \mathrm{Int}[G], |G| \geq n}} (1-c)^{|G|} \,.$$

В свою очередь, оценки такого рода сумм основаны на понятии *сопряженного графа* и доказанном в диссертации утверждении о взаимнооднозначном соответствии между внешними границами полных кластеров на бесконечном плоском графе и неспрямляемыми циклами на сопряженном к нему графе $\langle V, \Psi^* \rangle$. Задача о верхней оценке числа $\bar{N}_n$ таких неспрямляемых циклов в работе находились на основе метода, развитого во второй главе. На основе этой оценки доказана

Теорема 3.18. *Порог перколяции* c_* *на плоском периодическом однородном графе* $\mathcal{G}$ *не превосходит величины* $1 - \lambda_*^{-1}$, *где* λ_* *– показатель роста числа неспрямляемых путей на сопряженном графе* $\mathcal{G}^* = \langle V, \Psi^* \rangle$, *соответствующем графу* $\mathcal{G}$.

Это позволило получить в работе следующие конкретные верхние оценки для порога перколяции и приближенные формулы с контролируемой точностью для вероятностей перколяции в случае плоских однородных решеток.

На *квадратной решетки* оценка точности приближения с точностью до $(1-c)^n$ для вероятности перколяции $Q(c)$ дается рядом

$$\sum_{\substack{G \in \partial\bar{\mathfrak{W}}: \\ 0 \in \mathrm{Int}[G], |G| \geq n}} (1-c)^{|G|} \leq (1-c)^3 \lambda_* \left(\frac{d}{dx} \frac{x^{n-2}}{1-x} \right)_{x = \lambda_*(1-c)} .$$

В частности, при $n = 9$ имеем

$$Q(c) \approx c - c(1-c)^4 - 4c^2(1-c)^6 - 12c^3(1-c)^7 - 6c^3(1-c)^8 \,.$$

Верхняя оценка числа λ_* равна $(71)^{1/3} = 4.141$ (с избытком). Следовательно, соответствующая оценка порога перколяции: $c_* < 1 - \lambda_*^{-1} < 1 - (71)^{1/3} \approx 0,739$.

Соответственно, для *треугольной решетки* имеем

$$\sum_{\substack{G \in \partial\bar{\mathfrak{W}}: \\ 0 \in \mathrm{Int}[G], |G| \geq n}} (1-c)^{|G|} \leq \frac{3}{2}(1-c)^2 [(1-c)\lambda_*]^3 \left(\frac{d}{dx} \frac{x^{n-4}}{1-x} \right)_{x = (1-c)\lambda_*} .$$

Приближенное выражение для вероятности перколяции при $n = 11$ имеет вид

$$Q(c) \approx c - c(1-c)^6 - 24c^3(1-c)^9 - 21c^3(1-c)^{10}.$$

Верхняя оценка числа λ_* равна 3 и, следовательно, $c_* < 1 - 1/3 \approx 0,667$.

Для гексагональной решетки –

$$\sum_{\substack{G\in\mathfrak{D}\mathfrak{W}:\\ 0\in\mathrm{Int}[G],|G|\geq n}} (1-c)^{|G|} \leq \frac{3}{2}(1-c)^3\lambda_*\left(\frac{d}{dx}\frac{x^{n-2}}{1-x}\right)_{x=(1-c)\lambda_*}.$$

В частности, приближенное выражение для вероятности перколяции при $n = 6$ равно

$$Q(c) \approx c - c(1-c)^3 - 3c^2(1-c)^4 - 9c^3(1-c)^5.$$

Верхняя оценка для порога перколяции на гексагональной решетке

$$c_* < 2(1-\sqrt{3}/3) \approx 0.846.$$

Глава 4 (Теорема о внешних границах конечных кластеров) посвящена доказательству теоремы о взаимнооднозначной связи класса конечных полных кластеров в плоских бесконечных периодических графах и класса неспрямляемых циклов на соответствующих им сопряженных графах. Именно наличие такой взаимно-однозначной связи дало возможность построить, в третьей главе диссертации, уточнение контурных оценок и получить верхние оценки порогов перколяции c_*, а также оценки точности приближенных формул для вероятности перколяции для плоских однородных решеток.

Это утверждение формулируется следующим образом.

Теорема 4.6. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы цикл γ на графе $\langle V, \Psi^* \rangle$, сопряженном плоскому графу $\mathcal{M} = \langle V, \Psi \rangle$ типа мозаики выполнял роль внешней границей какого-либо конечного кластера W в $\mathcal{M}$, является его неспрямляемость.*

Для доказательства этой теоремы, потребовалось дать алгебраическое доказательство, в терминах плоских бесконечных графов, такого утверждения, которое является аналогом топологической теоремы Жордана для плоских непрерывных кривых. В отличие от теории Кестена, для доказательства этой теоремы не имеется возможности, напрямую, воспользоваться теоремой Жордана, так как понятие спрямляемости пути, в отличие от понятия его самопересекаемости, на котором была основана теория Кестена, не является топологическим понятием в $\mathbb{R}^2$.

В **Заключении** диссертации сформулированы основные результаты проведенного в работе исследования.

Список публикаций по теме диссертации

1. **Антонова Е.С.** Оценка порога перколяции на квадратной решетке // Научные ведомости. сер.физ.- мат.науки. – 2007. – N6(37). – вып.13. – С.60-64.
2. **Антонова Е.С.** Оценка числа траекторий без самопересечений на квадратной решетке. // Труды Воронежской зимней школы С.Г.Крейна – 2008. Воронеж 2008. – С.15-30.

3. **Антонова Е.С**, Вирченко Ю.П. Оценка числа ограниченных заполненных кластеров с фиксированной вершиной на кубической решетке // Научные ведомости. сер. Физика. БелГУ. – 2008 – 9(49);14. – С.52-57.
4. **Antonova E.S.**, Virchenko Yu.P. The Upper Bound of the Percolation Threshold of the Bernoulli Field on the Hexagonal Lattice // International Conference «Stochastic Analysis and Random Dynamics», June 14-20, 2009, Lviv, Ukraine. Abstracts. - P.8-9.
5. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Верхний порог бернуллиевского поля на гексагональной решетке // Материалы Второй Международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения». Минск, 24-28 августа 2009. часть I. – С.20-22.
6. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Кластерное разложение вероятности перколяции на гексагональной решетке // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2009. – 2(35). – С.25-30.
7. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Кластерное разложение вероятности перколяции на гексагональной решетке // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика, Математика. 2009.- 5(60);16. – С.5-28.
8. **Antonova E.S.**, Virchenko Yu.P. Cluster decomposition of percolation probability on the hexagonal lattice // arXiv.0909.1312. – 23 p.
9. **Antonova E.S.**, Virchenko Yu.P. The upper bound of the percolation threshold of the Bernoulli field on the cubic lattice // Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна 2010. Тезисы докладов. – Воронеж: ВГУ, 2010. – P.161-162.
10. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Просачивание бернуллиевского случайного поля на конечное расстояние // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука, 13-15 мая 2010. Матеріали конференції, III. – Київ: Інститут математики НАН України, 2010. – С.15.
11. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Просачивание бернуллиевского случайного поля на конечное расстояние // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2010. – 3(39). – С.30-34.
12. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Просачивание бернуллиевского случайного поля на конечное расстояние на древесных графах // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г.Крейна 2010. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2010. – С.3-7.
13. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Верхний порог перколяции бернуллиевского поля на гексогональной решетке // VIII School of Young Scientists "Non-local boundary problems and problems of modern analysis and informatics". Proceedings. Нальчик-Хабез, 25-30 июня 2010. Материалы. – С.10-11.
14. **Antonova E.S.**, Virchenko Yu.P. Finite range percolation of the Bernoulli random field on the finite graph // Mixed type equations and related problems of analysis and informatics. Нальчик-Хабез. 25-30 июня 2010. Материалы. – С.28-29.
15. **Antonova E.S.**, Virchenko Yu.P. Qualitative properties of the finite range percolation probability of the Bernoulli random field on graphs // International Conference Modern Stochastics: Theory and Applications II September 7-11, 2010, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – P.121.
16. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Свойство монотонности вероятности перколяции бернуллиевских случайных полей на бесконечных графах // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика. Математика. – 2010. – 11(82);20. – С.28-61.

17. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Непрерывная зависимость вероятности перколяции для однородных марковских ветвящихся процессов с дискретным временем // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика. Математика. – 2010. – 23(44);21. – С.11-22.
18. **Antonova E.S.**, Virchenko Yu.P. Monotonicity of the probability of percolation for Bernoulli random fields on periodic graphs //Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – 175;1. – P.86-90.
19. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Конечные кластеры на плоских мозаиках. Часть 1. Операции склеивания и разрезания // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2011. – 5(100);22. – С.140-152.
20. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Конечные кластеры на плоских мозаиках. Часть 2. Комбинаторное построение плоских графов // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2011. – 11(106);23. – С.179-188.
21. **Antonova E.S.**, Virchenko Yu.P. Upper estimates of percolation thresholds in the site problem on uniform three-dimensional lattices // 3d International Conference on Quantum Electrodynamics and Statistical Physics QEDSP2011 August 29- September 2, 2011, Kharkov, Ukraine / Book of Abstracts. – Kharkov: National Science Center «Kharkov Institute of Physics and Technology». – P.201.
22. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Монотонность вероятности перколяции бернуллиевских случайных полей на периодических графах / Современная математика и ее приложения. т.68, Дифференциальные уравнения с частными производными / М.:ВИНИТИ, 2011. – С.84-88.
23. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Конечные кластеры на плоских мозаиках. Часть 3. // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2011. – 23(118);25. – С.112-126.
24. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Элементарная оценка величины рода конечного графа / Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна 2012 / Материалы международной конференции. – Воронеж: Изд.ВГУ, 2012. – С.21-22.
25. **Antonova E.S.**, Virchenko Yu.P. Cluster expansion in site percolation problem on cubic lattice // Problems of Atomic Science and Technology. Series Nuclear Physics Investigations. – 2012. – 1. – P.321-323.
26. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Аппроксимации порога перколяции для бернуллиевских полей на мозаиках // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука. – Матеріали конференції III.– Київ: Інститут математики НАН України, 2012. – С.18.
27. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Верхняя оценка порога перколяции на квадратной решетке / Третья Международная научная конференция «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», Национальная Академия наук Беларуссии. Брест. 17-22 сентября / Тезисы докладов. – Брест: Брестский государственный университет, 2012. – С.13.
28. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Верхняя оценка порога перколяции на квадратной решетке / Математическое моделирование и дифференциальные уравнения, Труды Третьей Международной научной конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» / Минск: Белорусский государственный университет, 2012. – С.26-37.
29. **Antonova E.S.**, Virchenko Yu.P. Upper estimates of percolation thresholds of Bernoulli's random fields on plane periodic graphs // International Conference Modern Sto hastics: Theory and Applications III, September 10-14, 2012, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – P.20.

30. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Новый метод вычисления верхней оценки порога перколяции в задаче узлов на квадратной решетке // Belgorod State University Scientific Bulletin. – 2012. – 5(124);26 – С.26-32.
31. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Неспрямляемые пути на периодических графах // Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» 26-31 мая 2013, Белгород / Белгород: Политерра, 2013. – С.16-17.
32. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Абстрактные структуры связности на конечных множествах // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2015. – №11(208); 39. – С.77-83.
33. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Абстрактные структуры связности на конечных множествах // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2015. – №11(208); 39. – С.77-83.
34. **Антонова Е.С.**, Вирченко Ю.П. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2013661845 «Вычисление числа неспрямляемых путей заданной длины из фиксированной вершины на двумерных и трехмерных периодических графах». Заявка № 2013619875 от 29.10.2013.

Подписано в печать 08.12.2016. Формат 60×90/16.
Гарнитура Times New Roman. Усл. п. л. 1,2. Тираж 100 экз. Заказ 329.
Оригинал-макет подготовлен и тиражирован в ИД «Белгород» НИУ «БелГУ»
308015 г. Белгород, ул. Победы, 85